

2. コヒーレント光と 非コヒーレント光

光の基本的な性質である波動性をもとに、
光のコヒーレンスについて学ぶ。

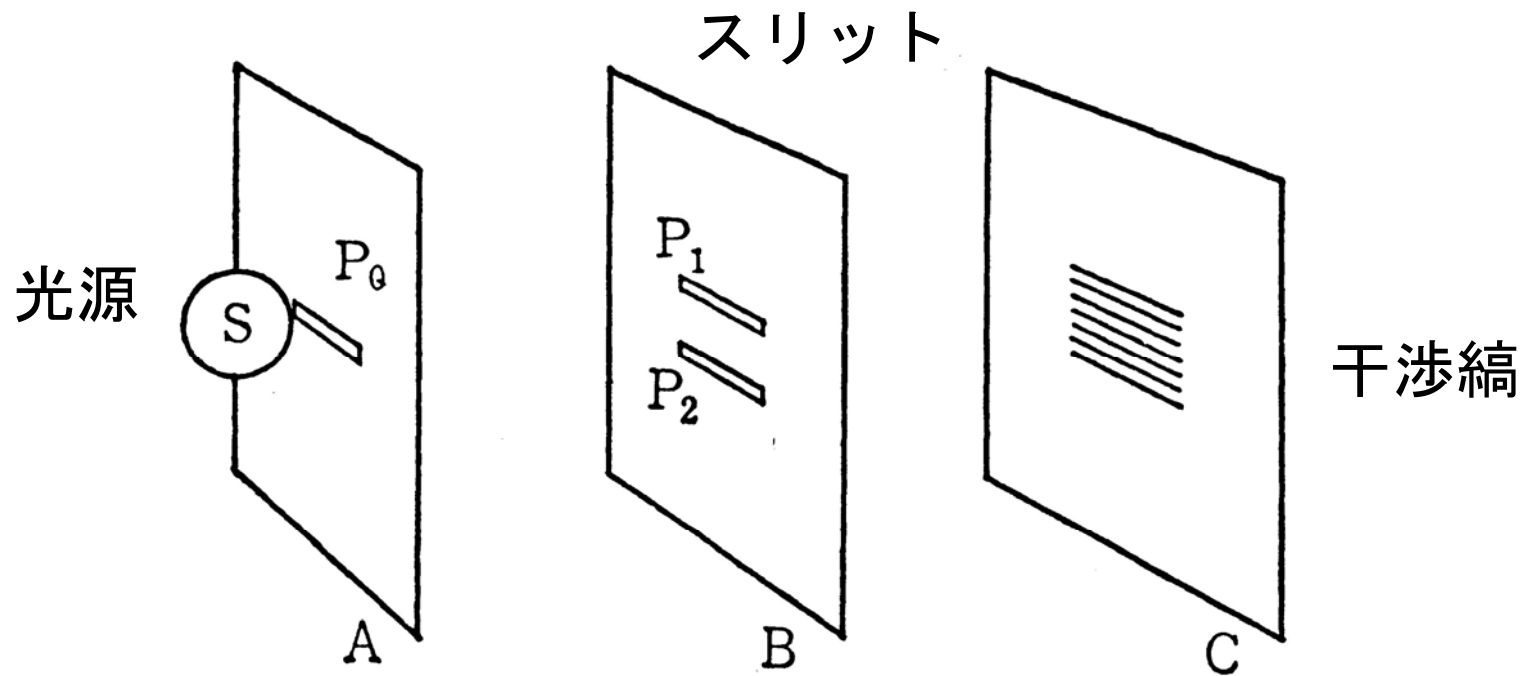
コヒーレンス — 可干渉性

光のコヒーレンス

Young (1801)

光の波動性

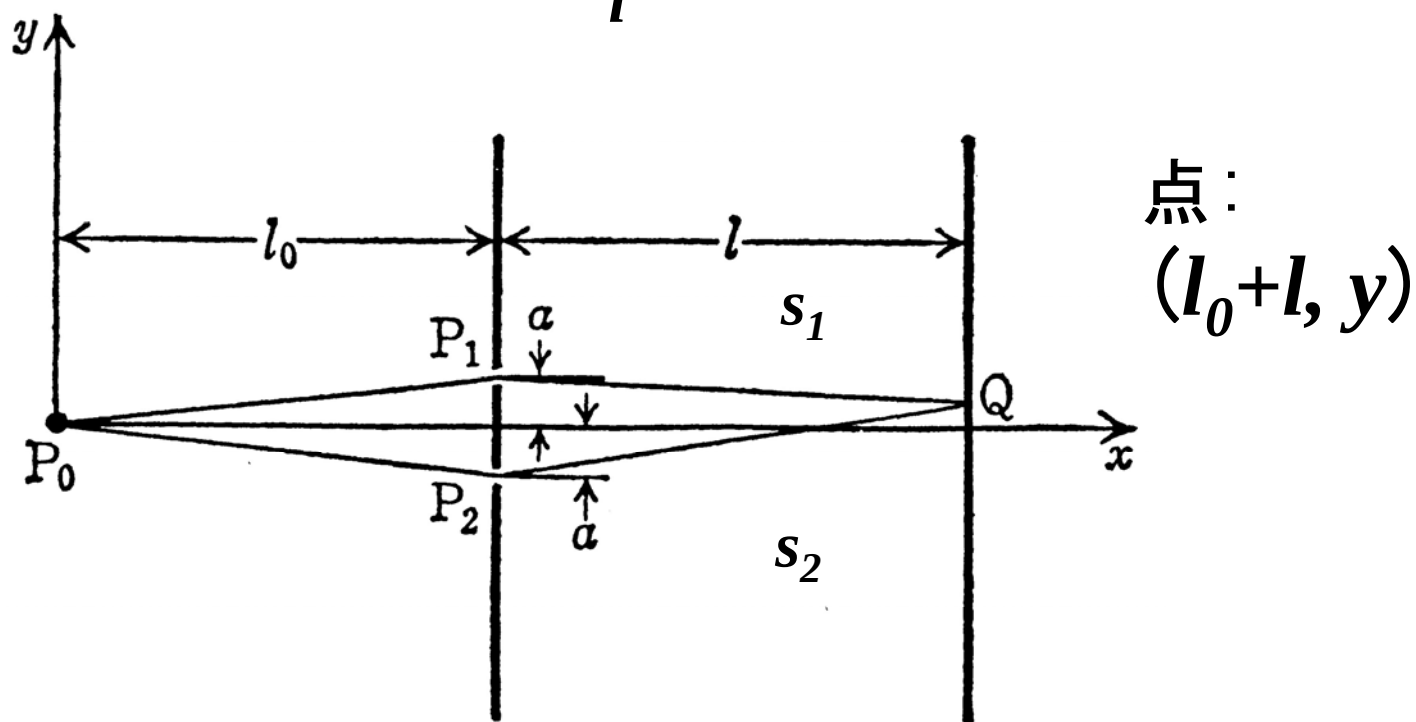
回折光 → 干渉縞



干渉縞の間隔

光路長差

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= \sqrt{l^2 + (y+a)^2} - \sqrt{l^2 + (y-a)^2} \\ &\cong \frac{2ay}{l} \quad (l \gg a, l \gg y) \end{aligned}$$



波の重ね合わせ

$$A_Q = A_1 \cos(\omega t - ks_1) + A_2 \cos(\omega t - ks_2)$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad k : \text{波数}$$

Q点における光強度

$$I_Q = \overline{A_Q^2} = \frac{1}{2} A_1^2 + \frac{1}{2} A_2^2 + A_1 A_2 \cos k(s_2 - s_1)$$

$$\text{輝線 : } k(s_2 - s_1) = 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\text{干渉縞 : } y_n = \frac{l\lambda}{2a} n$$

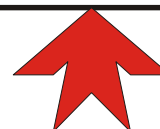
$$y_{n+1} - y_n = \frac{l\lambda}{2a} \rightarrow \text{光の波長、波動性}$$

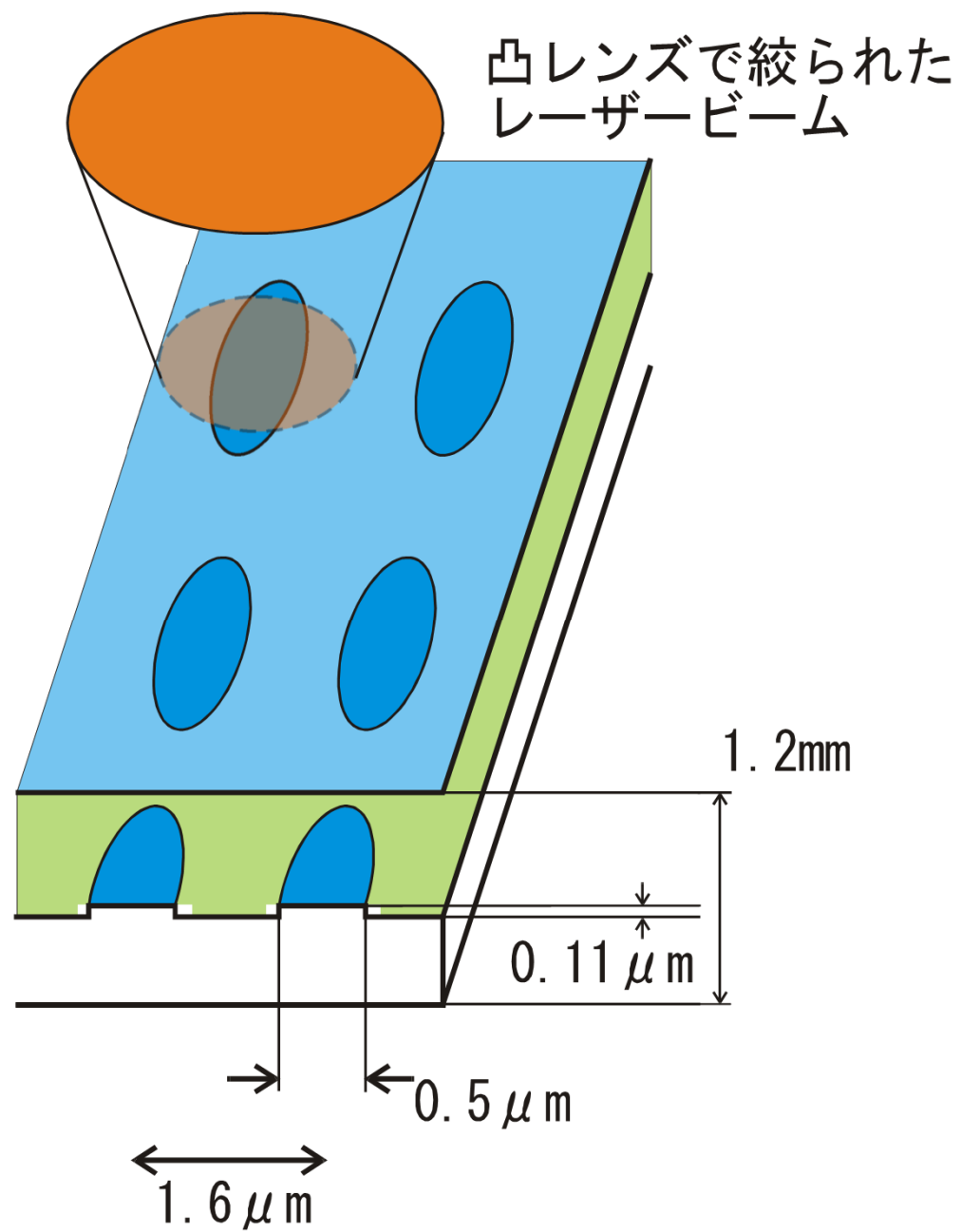
Compact Disc

光の干渉効果を利用した
光記憶デバイス

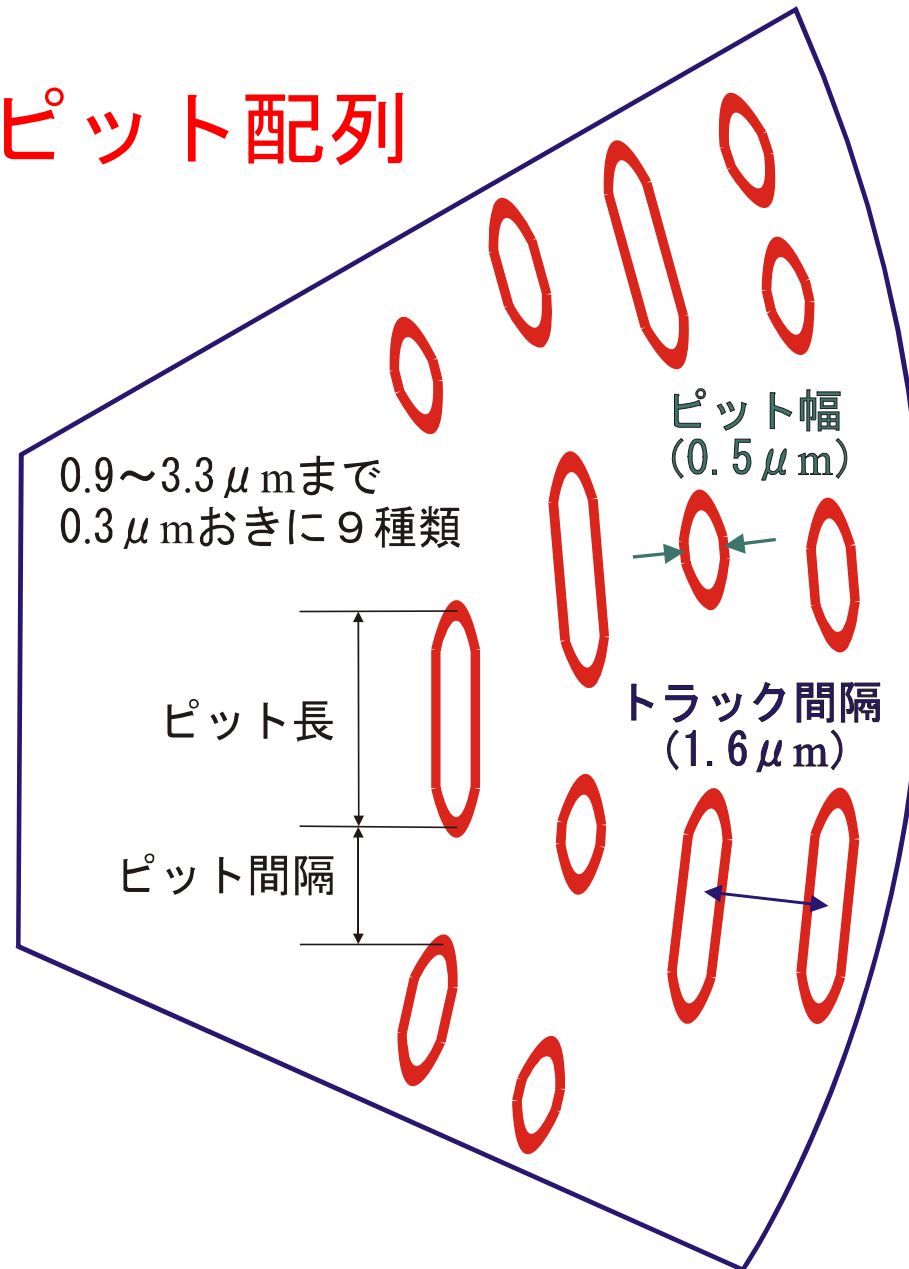


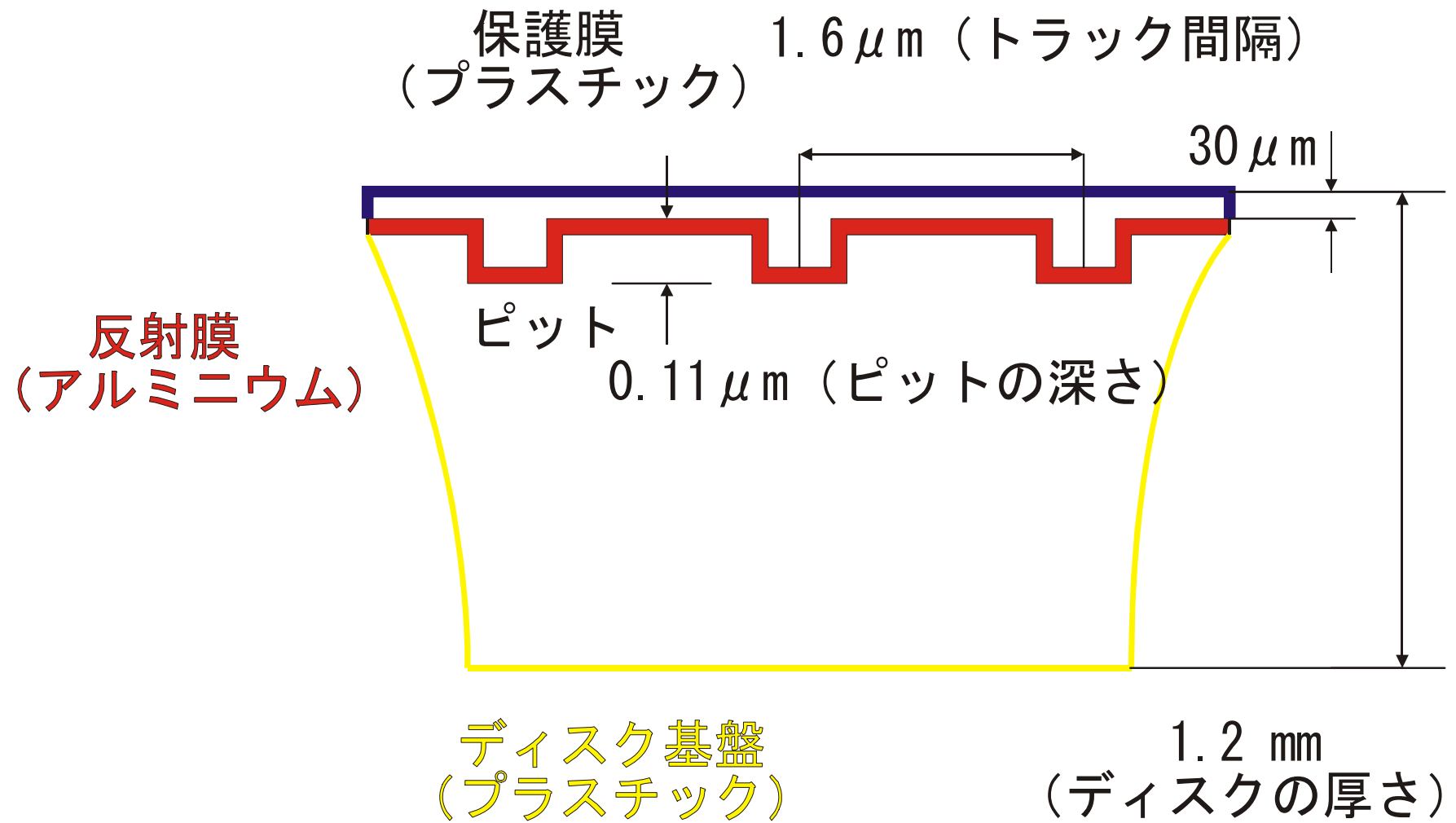
レーザー光

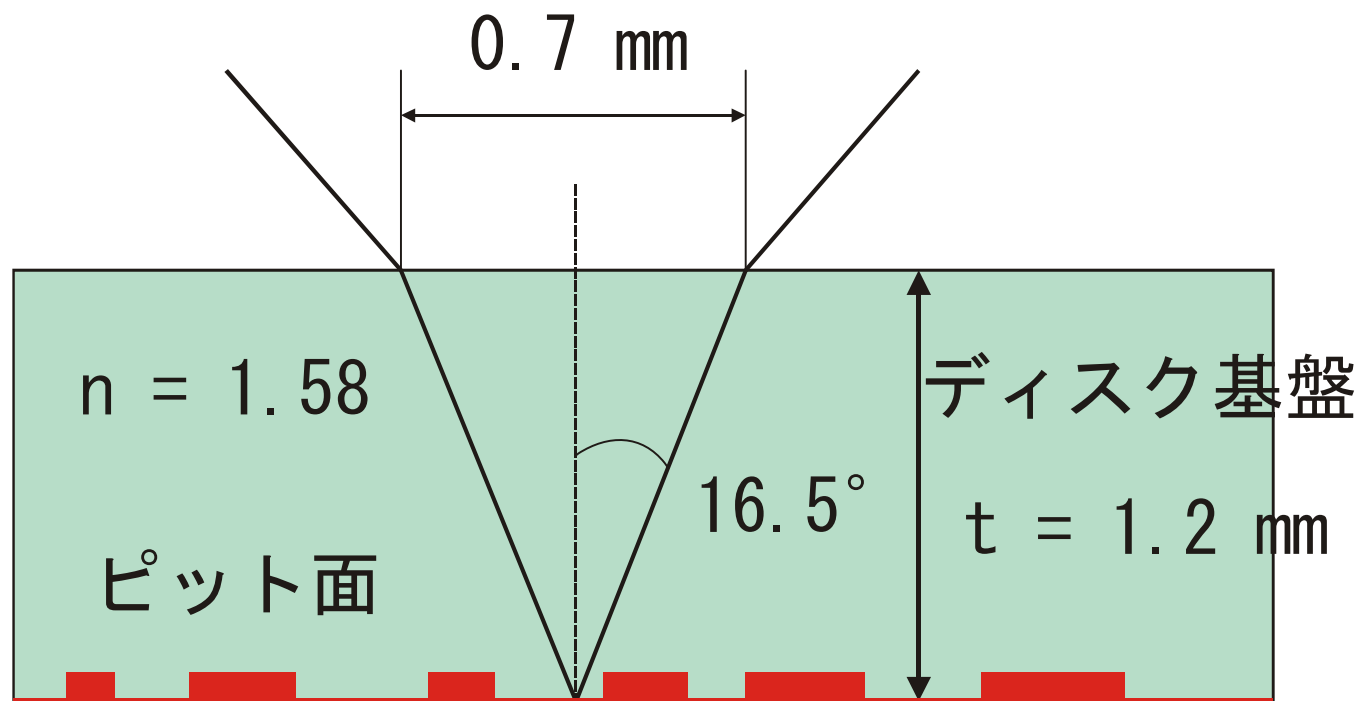


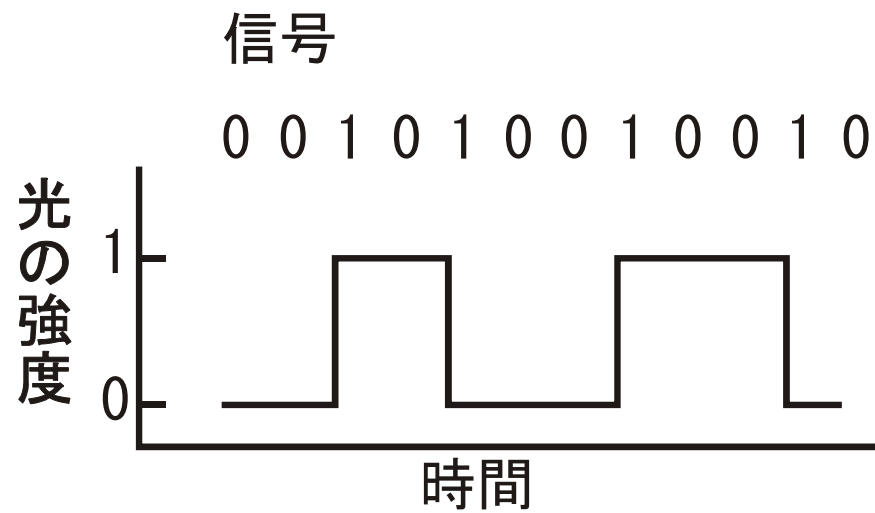


CDのピット配列

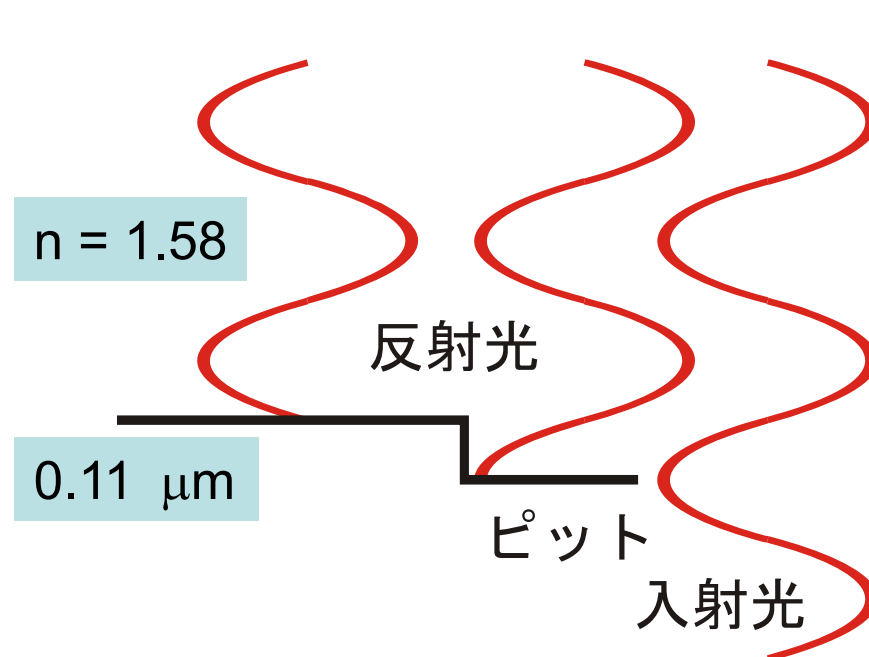








干渉効果



$$\begin{aligned}\Delta l &= 2 \times t \times n \\ &= 2 \times 0.11 \times 10^{-6} \times 1.58 \\ &= 0.35 \mu\text{m}\end{aligned}$$

700 nm のレーザー光

光のコヒーレンスとは

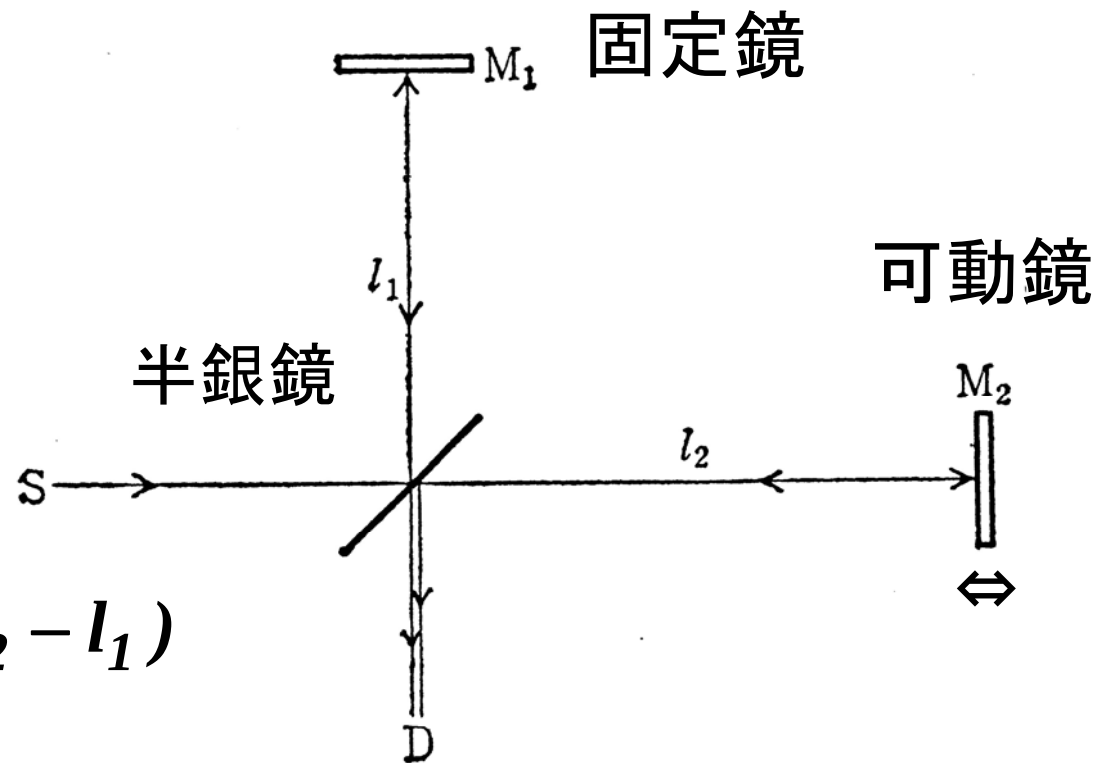
時間的コヒーレンス

空間的コヒーレンス

マイケルソンの
干渉計

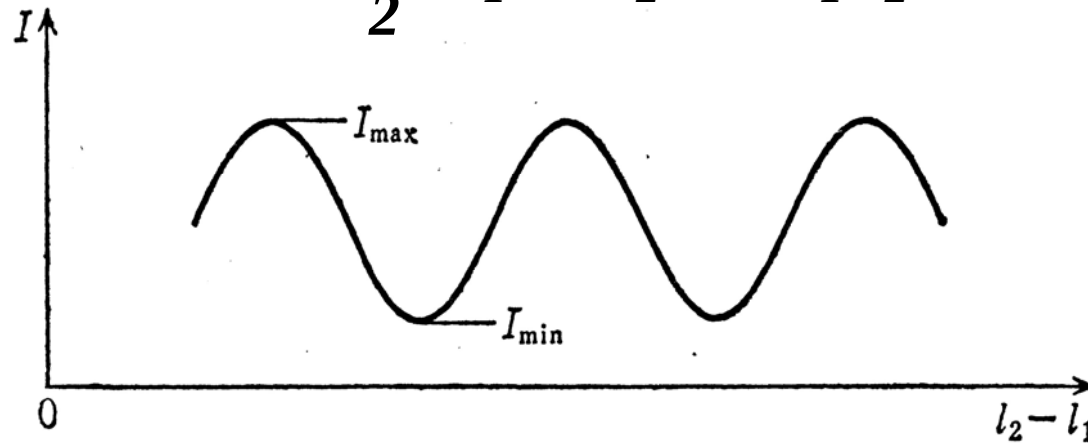
光路差：

$$s_2 - s_1 = 2(l_2 - l_1)$$



検出器に入る光の強さ

$$I = \frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2) + A_1A_2 \cos 2k(l_2 - l_1)$$



しかし、実際には完全な平行光線とは成りえないので、同心円状の干渉縞が見える。

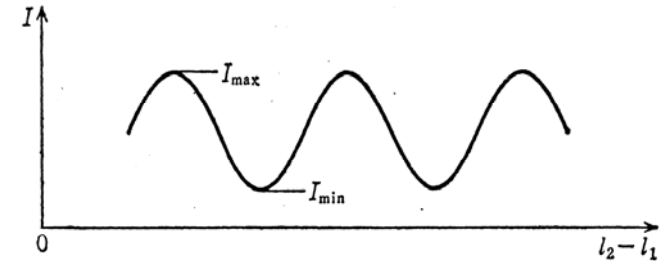
干渉縞が不鮮明になり、ついには消えてしまう。

コヒーレント長 (coherent length)
コヒーレンス (coherence) の長さ
ー干渉縞が観測できる長さ

時間的コヒーレンスと空間的コヒーレンス

明瞭度（コヒーレンス度）

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

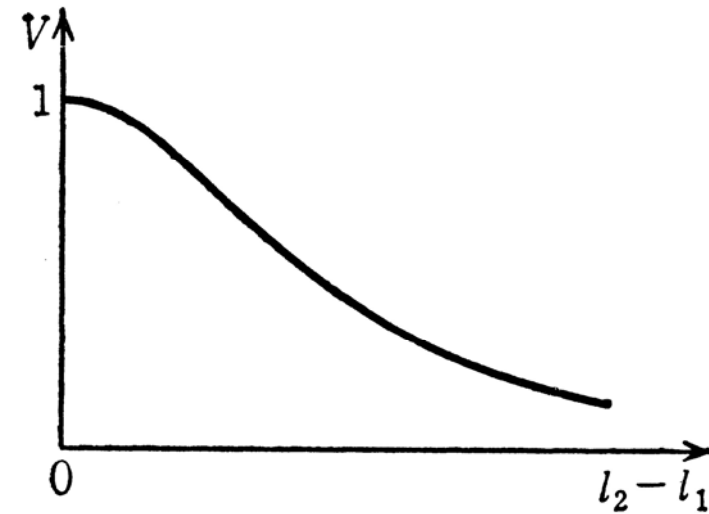


干渉縞の鮮明度の定量的表現

鮮明度は光路差の
増加とともに減少

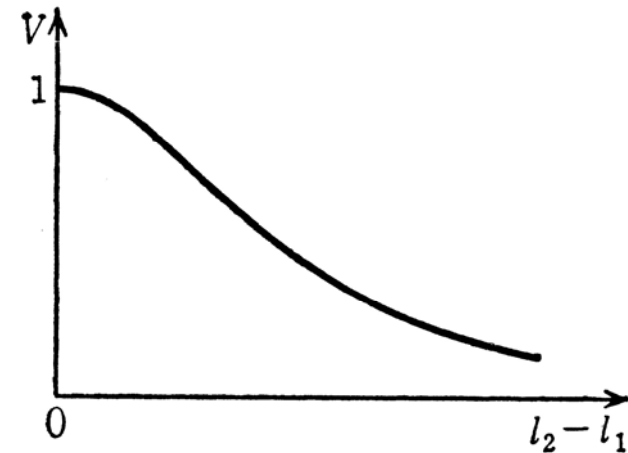


コヒーレント長
(厳密な定義は無い)



時間的コヒーレンス

$V=1$ 完全にコヒーレント
 $V=0$ 非コヒーレント
(incoherent)



コヒーレント長	
レーザー	1000km以上のものもある
白熱電球	数 μm

時間的コヒーレンス

- ①光源から放出される光の位相
- ②発光周波数の広がり

①光源から放出される光の位相

励起原子の発光

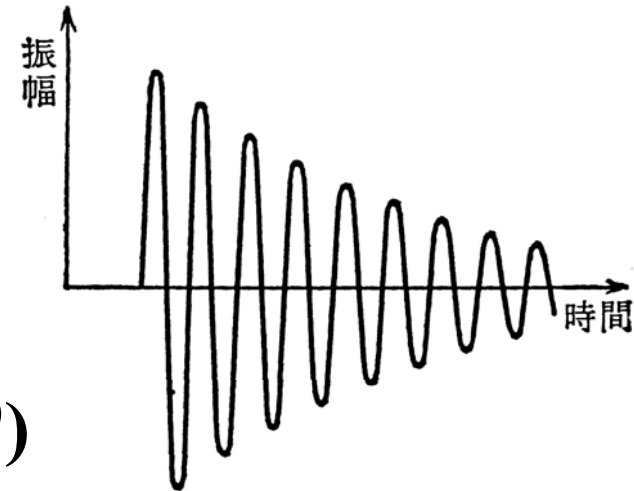
光エネルギーは一定
光の振幅は減衰振動

$$E(t) = Ae^{-t/2\tau_a} \cos(\omega t + \theta)$$

τ_a : 励起状態の寿命
(減衰する光の強さが1/e)
 θ : 初期位相 ($t=0$)

統計的に考えて、光源からの光波の初期位相は寿命程度の時間しかそろわない

$\tau_a = 10^{-9} \text{ s} \Rightarrow$ コヒーレント長 30cm
実際にはこれよりずっと短い



②発光周波数の広がり

スペクトル線の線形

均一幅

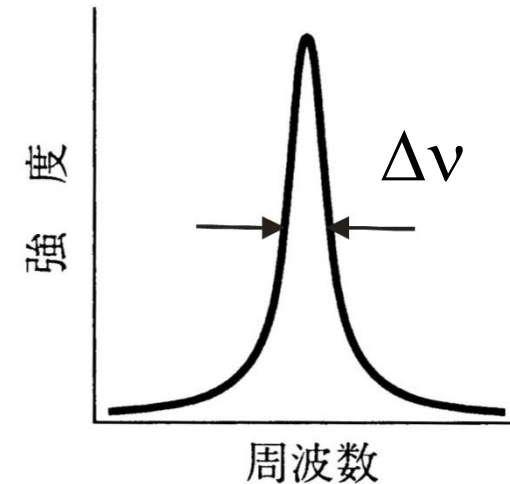
励起状態の寿命—不確定性原理
発光寿命
分子の衝突

不均一幅

ドップラー効果
分子の熱運動

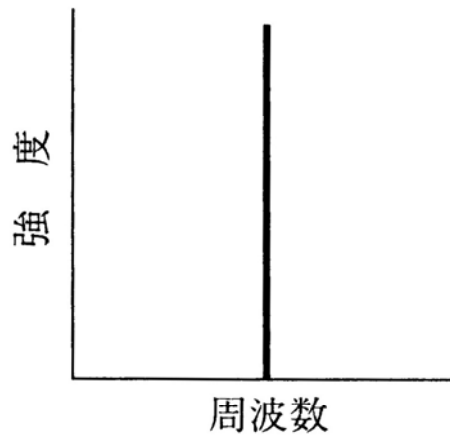
その他

媒質の不均質さ
磁場や電場の影響

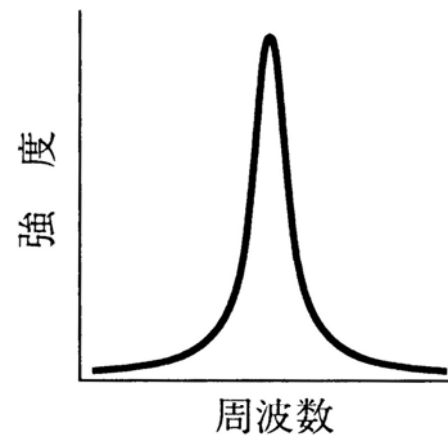


半値幅 (FWHM)

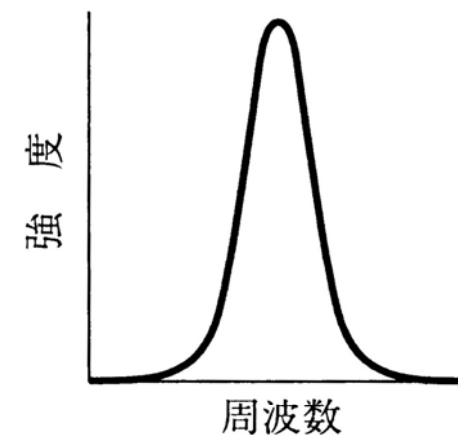
Full Width of Half Maximum



(a) 理想的な線スペクトル
(スペクトル広がりはない)



(b) 均一広がり (発光原子
が多数あっても、中心
周波数はすべて同じ。
ローレンツ型)



(c) 不均一広がり (中心周
波数の異なるものが多
数ある。ガウス型)

均一な広がり

$$L(\nu) = \frac{\Delta\nu}{2\pi \left\{ \left(\frac{\Delta\nu}{2} \right)^2 + (\nu - \nu_0)^2 \right\}}$$

不均一な広がり

$$G(\nu) = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} \exp \left\{ -4 \ln 2 \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D} \right)^2 \right\}$$

光源のスペクトル線の広がり
(均一幅、不均一幅など)



干渉縞の間隔が一樣でなく、鮮明度が落ちる



コヒーレンス時間のラフな見積り

$\Delta \omega t \geq 2\pi$ ー干渉縞の消失

$2\pi / \Delta \omega$ ーコヒーレント時間



光源の同じ点から出た光でも、スペクトル線の
逆数程度の時間しかコヒーレンスはない

空間的コヒーレンス

空間的に異なる2点の光の間に干渉性があること

ヤングの実験で光源の前のスリット幅を広げると干渉縞の鮮明度が落ちる

光源が大きさを持っていると、異なる2点から出た光の位相が同じとは限らない

一般には、光線束では横方向の空間的コヒーレンスは時間的コヒーレンスとは無関係なので区別して考える

レーザーは時間的コヒーレンス、空間的コヒーレンスをよくする仕組みが存在する

光のコヒーレンスの定量的表現 (コヒーレンス関数)

光の電場

単色平面波

z 軸の正の方向に進行する光の
座標 z 、時間 t における電場

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{z})$$

一般的には、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

$\mathbf{k}$: 波数ベクトル

光の複素数表示 — 単色光

$$\exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\} = \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + i\sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

虚部を無視して実部だけが物理的意味を持つ

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi)$$

$$= (\mathbf{E}_0 e^{i\varphi}) e^{i\omega t} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

$\mathbf{E}_0 e^{i\varphi}$: 複素振幅

$e^{i\omega t}$: 時間依存性、 $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$: 空間依存性

任意の時間変化する光の電場

周波数成分の分布がある光 — フーリエ展開

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

ここで、 $f(\omega)$ は $E(t)$ のフーリエ成分

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt$$

$f(-\omega) = f(\omega)^*$ でなければならない (E は実数)

複素振幅 ($\omega > 0$ のフーリエ成分)

$$A(t) = 2 \int_0^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{— Gabor の定義}$$

$$E(t) = \text{Re}[A(t)]$$

一様な媒質中の光エネルギー — 電場の自乗に比例

$$I(t) = |A(t)|^2 = A(t)A^*(t)$$

マイケルソンの実験 $\tau = (s_2 - s_1)/c$

$$I(t) = \{A(t) + A(t + \tau)\} \{A^*(t) + A^*(t + \tau)\}$$

$$= A(t)A^*(t) + A(t + \tau)A^*(t + \tau) + A(t)A^*(t + \tau) + A(t + \tau)A^*(t)$$

定常的な強さの光源では、強度の時間平均をとると

$$\overline{A(t)A^*(t)} = \overline{A(t + \tau)A^*(t + \tau)} = |A|^2$$

$$\overline{A(t)A^*(t + \tau)} = \overline{A(t - \tau)A^*(t)} = \left\{ \overline{A(t + \tau)A^*(t)} \right\}^*$$

$$\overline{I(t)} = 2|A|^2 + 2\operatorname{Re}\left\{ \overline{A(t)A^*(t + \tau)} \right\}$$

光強度 $\overline{I(t)} = 2 |A|^2 + 2 \operatorname{Re} \left\{ \overline{A(t)A^*(t+\tau)} \right\}$

自己相関係数 $G(\tau) = \left\langle A^*(t)A(t+\tau) \right\rangle$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A^*(t)A(t+\tau) dt$$

$\tau = (s_2 - s_1)/c$ として干渉縞の鮮明度を測定すると、
自己相関関数の相対的変化が求められる。

— 時間的コヒーレンスの測定

この時、自己相関係数 $G(\tau)$ は、強度スペクトル $I(\omega)$ のフーリエ変換になっている。

$$G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

この関係をウィーナー・キンチンの定理という

空間的コヒーレンス — 相互相関関数

$$G_{12}(\tau) = \left\langle A_1^*(t) A_2(t + \tau) \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A_1^*(t) A_2(t + \tau) dt$$

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{G_{12}(\tau)}{\sqrt{G_{11}(\tau) G_{22}(0)}} = \frac{A_1^*(t) A_2(t + \tau)}{\sqrt{I_1 I_2}}$$

複素コヒーレンス度

$$\gamma_{12}(\tau) = \gamma_0 e^{ik(s_2 - s_1)}$$

$$I_{\max(\min)} = I_1 + I_2 \pm 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_0|$$

より、 $V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma_0|$ となり、 γ_{12} の大きさ γ_0 が求まる。

ほぼ単色な光源

点 P_1

規格コヒーレンス関数

$$\gamma_{11}(\tau) = \frac{\langle A_1^*(t) A_2(t + \tau) \rangle}{\langle A_1^*(t) A_1(t) \rangle}$$

複素振幅

$$A_n(t) = Ae^{i\omega_n t + i\phi_n - \frac{t}{2\tau_a}}$$

発光の周波数は等しく位相がランダムなとき

$$\text{自己コヒーレンス関数} \quad \gamma_{11}(\tau) = e^{i\omega_0 \tau} e^{-\frac{|\tau|}{2\tau_a}}$$

原子の振幅の減衰

寿命が長く、発光周波数がガウス分布

$$I(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\omega} e^{-\left(\frac{\omega-\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\gamma_{11}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[-\left(\frac{\omega-\omega_0}{\omega}\right)^2 + i\omega\tau\right]} d\omega = e^{i\omega_0\tau} e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{4}}$$

自己コヒーレンス関数はガウス型で、原子の減衰時間が長くても、
 τ が $1/\omega$ 程度以上ではコヒーレンス度が小さくなる

終り